VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

6. SOLICITĂRI AXIALE

6.1. Tensiuni şi deformații

O bară este solicitată axial, dacă în secțiunile ei transversale se dezvoltă numai forțe axiale N, care pot fi constante sau variabile. Valoarea forței axiale, în dreptul unei secțiuni, este egală cu suma proiecțiilor pe axa barei, a tuturor forțelor situate la stânga sau la dreapta secțiunii considerate.

Pentru studiul eforturilor se recomandă să se reprezinte diagrama forțelor axiale pentru determinarea secțiunii (sau secțiunilor) periculoase. Forțele axiale **sunt considerate pozitive când produc solicitarea de întindere şi negative când produc solicitarea de compresiune a secțiunii transversale.**.

Forța axială este rezultanta tuturor tensiunilor normale care se dezvoltă într-o anumită secțiune transversală. Pentru a determina tensiunile, se consideră o bară solicitată axial, de lungime L, confecționată dintr-un material omogen şi izotrop şi care are o secțiune transversală constantă, cu aria A.

Prin aplicarea unei forțe axiale N bara se lungeşte cu cantitatea ΔL. O secțiune oarecare BC, situată la abscisa x se deplasează cu cantitatea Δx. Conform ipotezei lui Bernoulli "o secțiune plană şi normală pe axa barei înainte de deformație rămâne plană si normală pe axa barei după deformație", rezultă că toate punctele secțiunii BC se deplasează axial cu aceeaşi valoare Δx= ct. şi:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = ct.$$

Conform legii lui Hooke, alungirii specifice constante, îi corespund tensiuni normale constante:

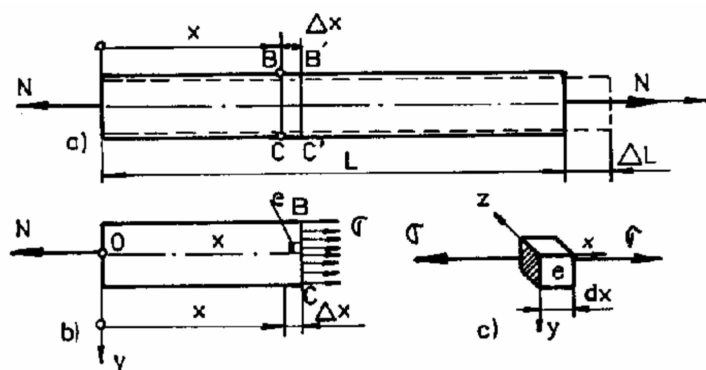
$$\sigma = E \cdot \varepsilon .$$

Prin ipoteză am considrat materialul izotrop, deci modulul de elasticitate este constant (E = ct.) şi ca urmare rezultă σ = ct.

Deci, **tensiunile sunt repartizate uniform pe suprafața secțiunii transversale** (fig.6.1,b).

Din ecuația de echilibru scrisă pentru partea din stânga a barei (fig.6.1,b) rezultă:

$$\mathbf{N = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \cdot \int_A dA = \sigma \cdot A}.$$



Din această ecuație se obține valoarea tensiunii normale pentru solicitarea la intindere sau compresiune:

$$\sigma = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}}. \qquad \textbf{(6.1)}$$

Fig. 6.1

Starea de tensiune, în acest caz, este o stare uniaxială (fig. 6.1,c).

Întrucât se consideră că materialul satisface legea lui Hooke, deformația specifică pentru solicitări axiale, are expresia:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{E \cdot A}}. \qquad \textbf{(6.2)}$$

Valoarea alungirii, respectiv a scurtării totale a barei este:

$$\mathbf{\Delta L} = \varepsilon \cdot \mathbf{L} = \frac{\mathbf{N \cdot L}}{\mathbf{E \cdot A}}. \qquad \textbf{(6.3,a)}$$

Dacă pe lungimea barei mărimile N, E, şi A sunt variabile, sau constante pe anumite porțiuni ale barei, alungirea se calculează cu relația:

$$\mathbf{\Delta L} = \int_L \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{E \cdot A}} \mathbf{dx} \quad \text{sau} \quad \mathbf{\Delta L} = \sum \frac{\mathbf{N \cdot L}}{\mathbf{E \cdot A}}. \qquad \textbf{(6.3,b)}$$

Alungirea (scurtarea) ΔL este cu atât mai mică cu cât produsul **EA este mai mare** şi de aceea produsul EA **se numeşte modul de rigiditate la întindere-compresiune**.

Relațiile deduse mai sus şi cele ce se vor deduce mai jos sunt valabile atât pentru solicitarea la întindere cât şi pentru cea de compresiune.

Barele de lungime mare solicitate la compresiune trebuie verificate la flambaj (vezi. § 15). Fenomenul de flambaj (numit şi pierderea stabilității elastice), se produce înainte ca tensiunile produse de solicitarea la compresiune să atingă valoarea σ_a. De aceea nu se pot calcula la compresiune decât barele scurte, a căror lungime nu întrece de 15 ori dimensiunea cea mai mică a secțiunii transversale:

$$\mathbf{L \le 15 \cdot d_{min}}, \qquad \mathbf{(6.4)}$$

iar pentru $\mathbf{L \ge 15 \cdot d_{min}}$ se va face calculul la flambaj (vezi § 15).

6.2. Calculul de rezistență la întindere - compresiune

Relațiile deduse mai sus se utilizează pentru rezolvarea problemelor Rezistenței materialelor: verificare, capacitate de încărcare şi dimensionare. Rezolvarea acestor probleme se face respectând atât în condiția de rezistență ($\sigma_{max} \le \sigma_a$) cât şi cea de rigiditate ($\varepsilon_{max} \le \varepsilon_a$ sau $\Delta L_{max} \le \Delta L_a$). Rezistența admisibilă (σ_a) respectiv deformața admisibilă (ε_a, ΔL_a) depind de factorii analizați în §1.5. Rezistențele admisibile pentru câteva materiale sunt date în anexa 1.

Ținând seama de aceste considerente se deduc, pe probleme, formulele de calcul.

a) **Verificarea** unei piese solicitată de un efort axial, constă în determinarea tensiunii maxime respectiv a deformației maxime şi compararea valorii obținute cu cea admisibilă. Valoarea rezultată trebuie să nu depăşească pe cea admisibilă adică:

- din condiția de rezistență:

$$\mathbf{\sigma_{ef} = \frac{N_{max}}{A_{ef}} \le \sigma_a} \qquad \mathbf{(6.5)}$$

- din condiția de rigiditate:

$$\mathbf{\varepsilon_{max} = \frac{N}{E \cdot A} \le \varepsilon_a} \ \text{ sau } \ \mathbf{\Delta L_{max} = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \le \Delta L_a}. \qquad \mathbf{(6.5,a)}$$

În prima relație (6.5) prin A_{ef} se înțelege valoarea ariei efective a secțiunii. În figura 6.2 se dau ariile efective pentru câteva secțiuni.

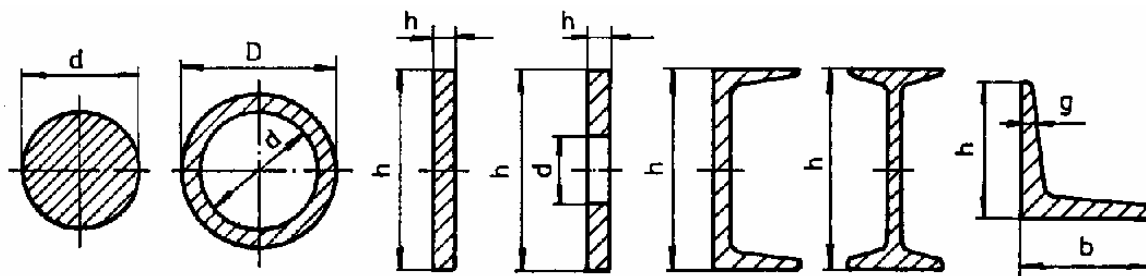


Fig. 6.2

Inegalitățile din formulele (6.5) nu sunt total restrictive, în sensul că **se pot depăşi cu 3...5 % valorile limită** (σ_a, ε_a, ΔL_a). Pentru a îndeplini condiția de utilizare eficientă a barei **se recomandă ca valoarea efectivă a tensiunii sau a deformației să nu fie inferioare valorii de 80 % din valoarea admisibilă**.

Dacă bara îndeplineşte simultan condițiile:

$$\mathbf{0{,}8 \cdot \sigma_a \le \sigma_{max} \le 1{,}05 \cdot \sigma_a}$$

$$\mathbf{0{,}8 \cdot \varepsilon_a \le \varepsilon_{max} \le 1{,}05 \cdot \varepsilon_a}, \qquad \mathbf{(6.5,c)}$$

$$\mathbf{0{,}8 \cdot \Delta L_a \le \Delta L_{max} \le 1{,}05 \cdot \Delta L_a}.$$

vom spune “BARA REZISTĂ”.

Dacă o singură mărime calculată din relațiile (6.5) depăşeşte cu 5% valoarea admisă atunci “BARA NU REZISTĂ”.

În cazul în care toate mărimile calculate sunt inferioare valorii de 80% din cele admisibile “BARA ESTE SUPRADIMENSIONATĂ”.

Atât în cazul în care bara nu rezistă cât şi în cazul în care este supradimensionată se va calcula valoarea sarcinii capabile.

b) **Capacitatea de încărcare** se calculează atât pentru barele la care nu se cunoaşte valoarea încărcării cât şi pentru acelea ce au fost verificate şi n-au corespuns sarcinii impuse, fie că erau subdimensionate sau/şi supradimensionate.

Cunoscând dimensiunile secțiunii transversale ale barei, materialul din care este confecționată (σ_a) şi condițiile de deformare (ε_a, ΔL_a), forța axială maximă se determină cu una din formulele:

- din condiția de rezistență:

$$\mathbf{N_{cap} = A_{ef} \cdot \sigma_a}, \qquad \textbf{(6.6,a)}$$

- din condiția de rigiditate:

$$\mathbf{N_{cap} = E \cdot A_{ef} \cdot \varepsilon_a} \text{ sau } \mathbf{N_{cap} = \frac{E \cdot A_{ef} \cdot \Delta L_a}{L}}. \qquad \textbf{(6.6,b)}$$

Dacă se ține seama de ambele condiții (de rezistență şi de rigiditate) rezultă două valori diferite pentru sarcina capabilă. Din acestea **se ia în considerare valoarea cea mai mică.**

Din calcul rezultă valori fracționale sau cu multe cifre. Dar, în practica inginerească se folosesc **valori normate** (valori prevăzute în norme sau standarde), ce au puține cifre şi sunt, de regulă, întregi. Deci, **inginerul trebuie totdeauna să aleagă valoarea forței,** astfel ca **bara să reziste, să fie utilizată eficient, iar valoarea forței să fie cea normată**. Astfel:

$$\mathbf{0{,}8 \cdot P_{cap\,min} \le P \le 1{,}05 \cdot P_{cap\,min}}. \qquad \textbf{(6.7)}$$

c) **Dimensionarea** este problema cea mai dificilă, şi constă în determinarea dimensiunilor secțiunii transversale ale barei astfel încât aceasta să reziste solicitărilor impuse.

Prima operație, pentru dimensionare, este aflarea efortului normal maxim. Aceasta rezultă din diagrama forței axiale. Apoi, se alege materialul pentru bară şi se adoptă valoarea rezistenței admisibile, respectiv a deformației admisibile.

Aria necesară a secțiunii transversală se calculează cu relațiile:

- din condiția de rezistență:

$$\mathbf{A_{nec} = \frac{N_{max}}{\sigma_a}}, \qquad \textbf{(6.8,a)}$$

- din condiția de rigiditate:

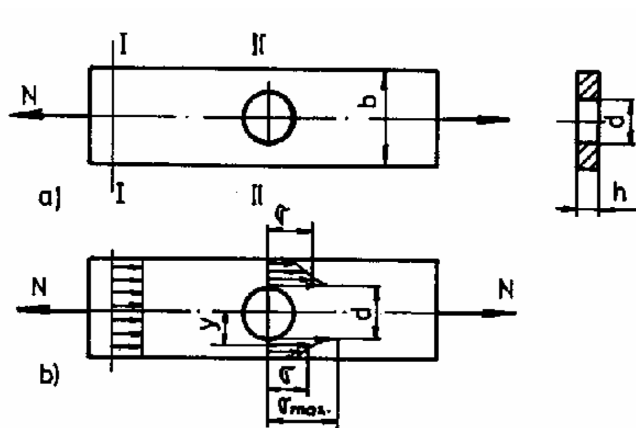


Fig. 6.3

$$\mathbf{A}_{nec} = \frac{\mathbf{N}_{max}}{\mathbf{E} \cdot \varepsilon_a}$$

sau $$\mathbf{A}_{nec} = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_{max}}{\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{L}_a}.$$

(6.8,b)

Ca şi la capacitatea de încărcare şi aici pot rezulta două valori diferite pentru arie. De această dată **se ia în considerare valoarea cea mai mare pentru a fi satisfăcute simultan cele două condiții.** De asemenea şi aici dimensiunile transversale ale barelor sunt normate şi **trebuie totdeauna să se aleagă**, **valoarea standardizată**. În acest scop **se aleg** forma şi dimensiunile secțiunilor date în tabele cu profile standardizate (vezi fig. 6.2).

6.3. Bare cu variație de secțiune. Secțiune periculoasă

În numeroase cazuri, din motive constructive, aria secțiunii transversale variază în lungul barei. Spre exemplu în figura (6.3,a) este prezentată o platbandă cu secțiunea transversală dreptunghiulară de lățime b şi grosime h slăbită în secțiunea II-II de o gaură cu diametrul d şi solicitată de o forță axială N. Tensiunile produse nu au aceeaşi valoare în fiecare secțiune transversală. Tensiunile în secțiunea I-I, ce se găseşte la depărtare de secțiunea slăbită, sunt mai mici decât în secțiunea II-II.

Secțiunea în care iau naştere cele mai mari tensiuni normale se numeşte **secțiune periculoasă**. Calculele de rezistență, în acest caz, se fac pentru secțiunea periculoasă. Pentru bara din figura 6.3 secțiunea periculoasă este secțiunea II-II, ce are aria minimă. Valoarea medie a tensiunii în această secțiune se determină cu relația:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_{ef}} = \frac{N}{(b-d)\cdot h},$$

şi se numeşte **tensiune nominală**.

Prin măsurări tensometrice s-au determinat valorile reale ale tensiunilor în bara cu secțiune variabilă. S-a stabilit că tensiunile nu se repartizează uniform pe suprafața secțiunii transversale, ci au o variație parabolică ca în figura (6.3,b), cu valoarea maximă la marginea găurii.

În Teoria elasticității se demonstrează că tensiunea în secțiunea periculoasă, la ordonata y de axa Ox, este dată de relația:

$$\sigma = \frac{N}{b\cdot h}\cdot\left(1 + \frac{d^2}{8y^2} + \frac{3d^4}{32y^4}\right),$$

iar tensiunea maximă, la marginea găurii, pentru $y = \frac{d}{2}$ este:

$$\sigma_{max} = 3\frac{N}{b\cdot h} = 3\cdot\sigma_0,$$

unde:

$\sigma_0 = \frac{N}{b\cdot h}$ este tensiunea nominală din secțiunea neslăbită I-I.

Stări de solicitare asemănătoare se produc şi în dreptul altor variații de secțiune. În figura (6.4,a,b) s-au redat alte două exemple de variație a secțiunii transversale. În aceste cazuri tensiunea normală maximă apare la marginea secțiunii transversale, în dreptul crestăturii (fig. 6.4,a) şi în dreptul racordării (fig. 6.4,b).

Găurile, racordările, crestăturile, etc. care produc o modificare bruscă a secțiunii barei, influențează distribuția tensiunii normale, se numesc **concentratori de tensiune**.

Pentru cazul general tensiunea normală maximă se determină cu relația:

$$\sigma_{max} = \alpha_k\cdot\sigma_0 = \alpha_k\cdot\frac{N}{A} \qquad \textbf{(6.9)}$$

unde:

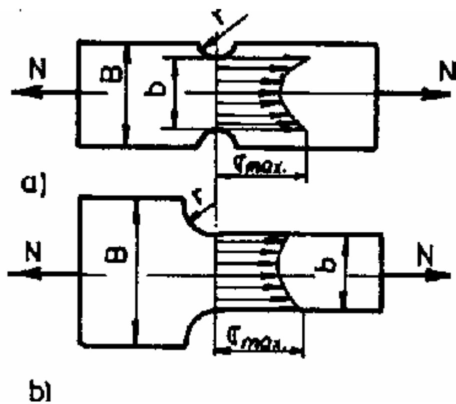


Fig. 6.4

$\alpha_k > 1$ este **coeficientul teoretic de concentrare al tensiunilor** sau **coeficient de formă**.

Mărimea coficienților de concentrare a tensiunilor se ia din manualele inginereşti în funcție de dimensiunile secțiunii şi de mărimea şi configurația concentratorilor.

Concentratorii de tensiune sunt deosebit de periculoşi pentru materialele fragile. Dacă materialul barei este tenace efectul concentratorului este redus şi uneori chiar neglijabil.

În figura (6.5,a, b, c, d) sunt date câteva diagrame cu coeficienți de concentrare a tensiunilor normale pentru patru forme de concentratori.

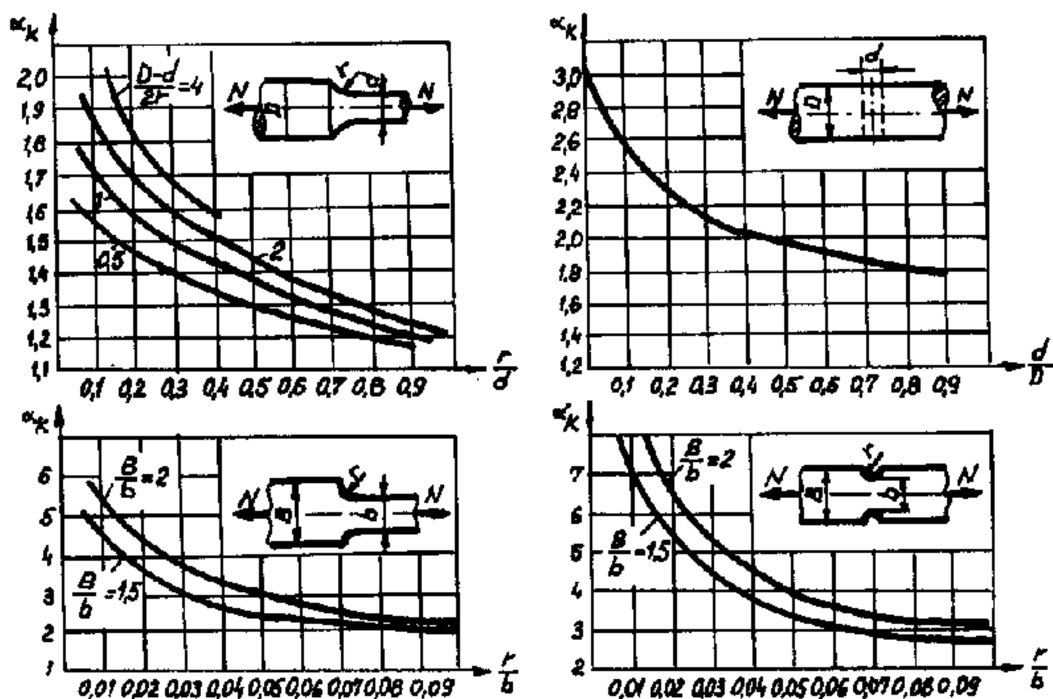


Fig. 6.5

Aplicația 6.1. O bară de secțiune dreptunghiulară de (100x12) mm este asamblată de un guseu prin trei nituri de diametru d=18 mm (fig.6.6). Bara este solicitată la întindere de forța P =150 kN. Se cere să se verifice bara în ipoteza că forța P se repartizează uniform pe cele 3 nituri, dacă σ_a= 150 MPa şi α_k= 1.

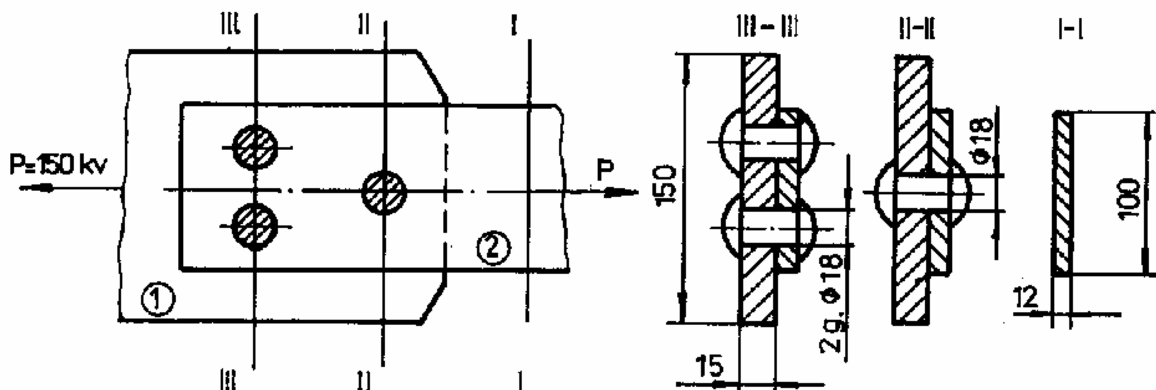


Fig. 6.6

Rezolvare: Tensiunea maximă din secțiunea I a barei este:

$$\sigma_{max_I} = \frac{N_I}{A_{ef_I}} = \frac{150 \cdot 10^3}{12 \cdot 100} = 125 \text{MPa} < \sigma_a .$$

Tensiunea nominală din secțiunea II, rezultă:

$$\sigma_{max_{II}} = \frac{N_{II}}{A_{ef_{II}}} = \frac{150 \cdot 10^3}{12 \cdot 100 - 18 \cdot 12} = 152{,}4 \text{ MPa} < 1{,}05 \cdot \sigma_a .$$

Întrucât, prin ipoteză, forța P se repartizează uniform pe cele trei nituri rezultă că o forță P/3 a trecut de la bara la guseu, prin nitul din secțiunea II. În secțiunea III a mai rămas 2/3 P, astfel că tensiunea normală în bară este:

$$\sigma_{max_{III}} = \frac{N_{III}}{A_{ef_{III}}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 150 \cdot 10^3}{12 \cdot 100 - 2 \cdot 18 \cdot 12} = 130{,}2 \text{ MPa} < \sigma_a .$$

Deci, secțiunea periculoasă este secțiunea II-II, unde se verifică condiția impusă ca $\sigma_{ef\,II} < 1{,}05 \cdot \sigma_a$, printr-o depăşire a tensiunii admisibile cu numai 1,6 %.

Aplicația 6.2. Să se verifice bara din figura 6.7 solicitată la întindere de o forță P = 7,4 kN ştiind că σ_a= 150 MPa.

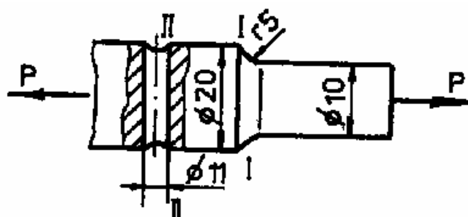


Fig. 6.7

De pe curba:

$$\frac{D-d}{2r}=\frac{20-10}{10}=1,$$

dată în figura (6.5,a), pentru r/d = 0,5 se obține:

$$\alpha_k=1{,}37.$$

Astfel, tensiunea normală maximă din secțiunea I rezultă:

$$\sigma_{max_I}=\alpha_k\cdot\frac{P}{A_{ef}}=1{,}37\cdot\frac{4\cdot 7{,}4\cdot 10^3}{10^2}=129{,}1\ \text{MPa}<\sigma_a.$$

Din diagrama prezentată în figura (6.4,c), pentru d/D = 0,5 se obține $\alpha_{k\,II}$= 1,95 astfel că:

$$\sigma_{max_{II}}=\alpha_k\cdot\frac{P}{A_{ef}}=1{,}95\cdot\frac{7{,}4\cdot 10^3}{\frac{\pi\cdot 20^2}{4}-20\cdot 11}=153{,}3\ \text{MPa}<1{,}05\cdot\sigma_a.$$

Deci bara este corect dimensionată întrucât în ambele secțiuni se respectă condiția (6.5,c).

6.4. Calculul barelor verticale luând în considerare și greutatea proprie

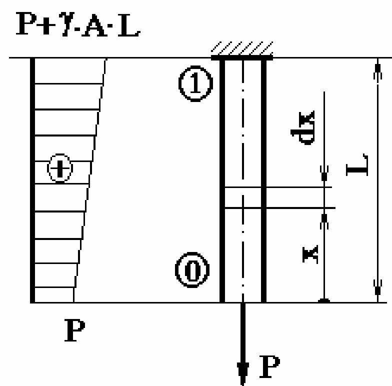


Fig. 6.8

În cazul barelor de lungimi mari, care sunt în poziție verticală, calculul la solicitări axiale, se face luând-se în considerare și greutatea proprie.

Să considerăm o bară verticală, prismatică de lungime L și cu rigiditate EA, confecționată dintr-un material omogen, cu greutatea specifică γ. Bara este încastrată la un capăt și este solicitată la întindere de o forță P și de greutatea proprie conform figurii 6.8.

Într-o secțiune oarecare situată la abscisa x de capătul liber al barei,valoarea forței axiale este:

$$\mathbf{N = P + \gamma \cdot A \cdot x} \qquad \mathbf{(6.10)}$$

şi are variație liniară.

Valorile extreme ale forței sunt:

$$\mathbf{N_0 = P,}$$
$$\mathbf{N_1 = P + \gamma \cdot A \cdot L.}$$

Valoarea tensiunii normale într-o secțiune oarecare este:

$$\sigma = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}} + \gamma \cdot \mathbf{x} = \sigma_0 + \gamma \cdot \mathbf{x}, \qquad \mathbf{(6.11)}$$

iar valoarea maximă a tensiunii este în dreptul secțiunii 1:

$$\sigma_1 = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}} + \gamma \cdot \mathbf{L} = \sigma_0 + \gamma \cdot \mathbf{L}, \qquad \mathbf{(6.12)}$$

în care tensiunea minimă s-a notat cu σ_o= P/A.

Din relația (6.12) se obține:

- pentru dimensionare:

$$\mathbf{A}_{nec} = \frac{\mathbf{P}}{\sigma_a - \gamma \cdot \mathbf{L}}: \qquad \mathbf{(6.13)}$$

- pentru verificare:

$$\sigma_{max} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}_{ef}} + \gamma \cdot \mathbf{L}: \qquad \mathbf{(6.14)}$$

- pentru calculul capacității de încărcare:

$$\mathbf{P}_{cap} = \mathbf{A}_{ef} \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot \mathbf{L}). \qquad \mathbf{(6.15)}$$

Alungirea, respectiv scurtarea barei verticale lungi se obține astfel:

$$\Delta \mathbf{dx} = \varepsilon_x \cdot \mathbf{dx} = \frac{\sigma}{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{E}} \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}} + \gamma \cdot \mathbf{x} \right) \cdot \mathbf{dx},$$

sau:

$$\Delta L = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \frac{1}{E}\cdot\left(\frac{P}{A}+\gamma\cdot x\right)\cdot dx = \frac{1}{E}\cdot\left(\frac{P\cdot L}{A}+\frac{\gamma\cdot L^2}{2}\right) = \frac{\left(P+\frac{G}{2}\right)\cdot L}{E\cdot A} \quad (6.16)$$

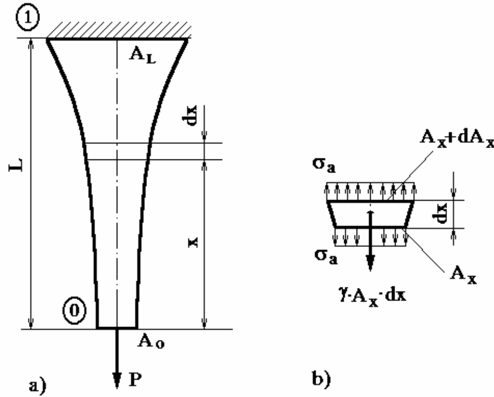


Fig. 6.9

în care $G = \gamma\cdot A\cdot L$, este greutatea barei.

Realizarea unor astfel de bare verticale prismatice, (de secțiuni constante) şi lungimi mari sunt soluții neeconomicoase şi din această cauză s-a ajuns la **bara de egală rezistență, care este o bară de secțiune variabilă la care este îndeplinită condiția $\sigma = \sigma_a$ pe toată lungimea barei** (fig. 6.9,a).

În scopul determinării modului de variație al ariei, se izolează un element de lungime dx (fig. 6.9,b), de greutate $\gamma\cdot A_x\cdot dx$**, pe secțiunile c**ăruia se reprezintă tensiunile normale σ_a (din condiția ca bara să fie de egală rezistență).

Din ecuația de echilibru a acestui element se obține:

$$\gamma\cdot A_x\cdot dx - \sigma_a\cdot\left(A_x + dA_x\right) + \sigma_x\cdot A_x = 0,$$

sau

$$\gamma\cdot A_x\cdot dx - dA_x\cdot\sigma_a = 0,$$

care prin separarea variabilelor şi integrare conduce la expresia:

$$\ln A_x = \frac{\gamma}{\sigma_a}\cdot x + C.$$

Constanta C se determină prin utilizarea condițiilor la limită şi anume, pentru x= 0 rezultă $C = \ln A_0$. Expresia de mai sus devine:

$$\ln A_x = \frac{\gamma}{\sigma_a}\cdot x + \ln A_0,$$

de unde se obține relația ce exprimă modul de variație al ariei secțiunii transversale:

$$A_x = A_0\cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma_a}\cdot x} \quad (6.17)$$

Realizarea practică a unei astfel de bare este dificil de executat şi deci scumpă. De aceea în practica inginerească se utilizează bare cu variații în trepte, eficient calculate. În acest mod, cu toate că forța axială creşte de la valoarea P la P+G, tronsoanele se pot realiza astfel ca tensiunile efective să fie cuprinse în domeniul:

$$\mathbf{1{,}05 \cdot \sigma_a \geq \sigma_{ef} \geq 0{,}8 \cdot \sigma_a}\,.$$

Pentru exemplificare se consideră bara din figura 6.10, formată din trei tronsoane cu lungimile L_1, L_2, L_3. Dimensionarea barei, ținând seama de condiția de rezistență, se face astfel:

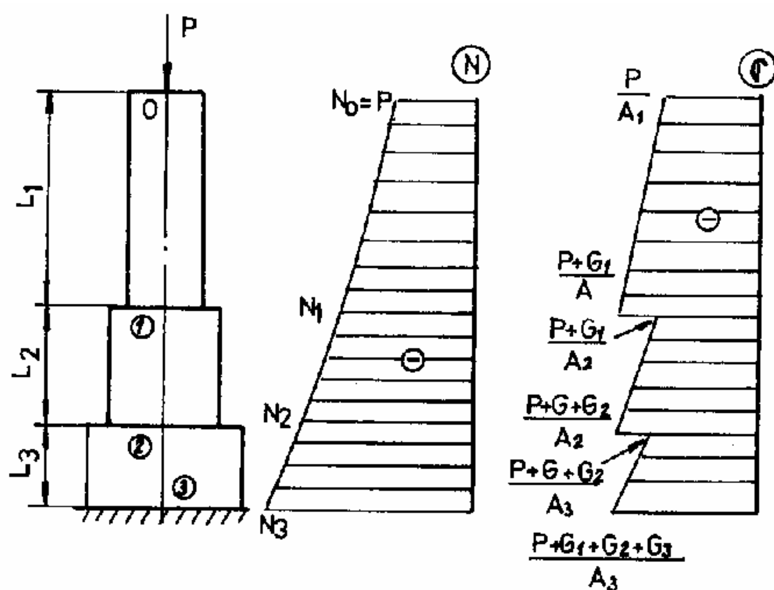


Fig. 6.10

$$\mathbf{N_0 = P}, \qquad \mathbf{A_{1nec} = \frac{P}{\sigma_a - \gamma_1 \cdot L_1}}.$$

Se adoptă A_1 şi apoi se calculează:

$$\mathbf{N_1 = P + G_1 = P + \gamma_1 \cdot A_1 \cdot L_1}, \quad \mathbf{A_{2nec} = \frac{N_1}{\sigma_a - \gamma_2 \cdot L_2}},$$

apoi se adoptă A_2.

Generalizând, dimensionarea se face cu formula:

$$\mathbf{A_{inec}} = \frac{\mathbf{P} + \sum_{0}^{i-1} \gamma_i \cdot \mathbf{A_i} \cdot \mathbf{L_i}}{\sigma_a - \gamma_i \cdot \mathbf{L_i}} = \frac{\mathbf{P} + \sum_{0}^{i-1} \mathbf{G_i}}{\sigma_a - \gamma_i \cdot \mathbf{L_i}}. \qquad \mathbf{(6.18)}$$

Dacă tronsoanele sunt realizate din materiale diferite în formula (6.18) se ia valoarea tensiunii admisibile cea mai mică din valorile pentru cele două materiale în contact (a se vedea § 6.5.1).

Efortul maxim la contactul dintre cele două tronsoane este:

$$\mathbf{N_i} = \mathbf{P} + \sum_{0}^{i-1} \gamma_i \cdot \mathbf{A_i} \cdot \mathbf{L_i} = \mathbf{P} + \sum_{0}^{i-1} \mathbf{G_i}. \qquad \mathbf{(6.19)}$$

Alungirea respectiv scurtarea barei formate din tronsoane rezultă prin însumarea alungirilor (scurtărilor) fiecărui tronson, Astfel, prin aplicarea succesivă a formulei (6.16) se obține:

$$\Delta \mathbf{L} = \sum_{1}^{i} \frac{\mathbf{N_{i-1}} + \frac{\mathbf{G_i}}{2}}{\mathbf{E_i} \cdot \mathbf{A_i}} \cdot \mathbf{L_i}. \qquad \mathbf{(6.20)}$$

6.5. Presiunea de contact

În calculele de rezistență la compresiune este necesară determinarea modului cum sunt transmise sarcinile aplicate, adică a modului de considerare a **presiunii de contact**. Aceasta este considerată o tensiune normală pe suprafața de contact, ce se dezvoltă pe suprafața de aplicare a sarcinilor. Dacă presiunea de contact atinge valori prea mari, ce depăşesc limita admisibilă a unui material în contact, se produce distrugerea prin strivire, a elementului respectiv. De aceea, când forța se transmite între doua (ER) din materiale diferite se va ține seama în calcul, de rezistența admisibilă cea mai mică la compresiune a materialelor în contact.

Relațiile de calcul ale presiunii de contact diferă în funcție de felul suprafeței de contact (plană, cilindrică, sferică, etc).

6.5.1. Suprafața plană de contact

Pentru **suprafețe plane de contact se admite o distribuție uniformă a presiunii de contact**, egală cu tensiunea normală pe această suprafață. În acest caz rezistența la strivire este:

$$\mathbf{p_{ef} = \frac{P}{A} \leq p_a = \sigma_{ac}}, \qquad \textbf{(6.21)}$$

în care σ_{ac} este rezistența admisibilă la compresiune, cea mai mică, a materialelor în contact.

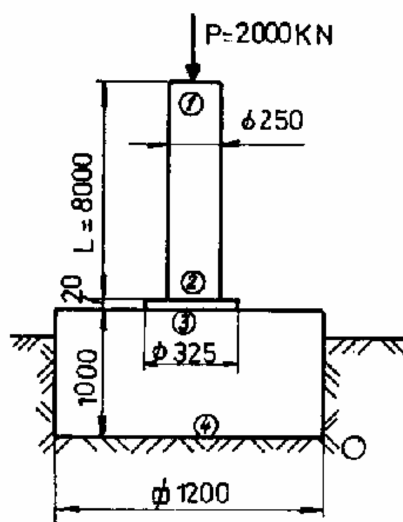


Fig. 6.11

Aplicația 6.3. Să se verifice stâlpul din figura 6.11, ştiind că este confecționat din aluminiu cu p_{aAL}= 45 MPa. Acesta apasă pe o placă de oțel cu p_{aOL}= 100 MPa care apoi se sprijină pe un bloc de beton cu p_{abet}=30 MPa şi totul pe pământ. Presiunea admisibilă pentru pământ este de $p_{apăm}$=2 MPa. Se cunoaşte: γ_{AL} = 27 kN/m^3, γ_{OL}= 78,5 kN/m^3 şi γ_{beton}= 22 kN/m^3.

Rezolvare: forța la contactul dintre stâlpul de aluminiu şi placa de oțel rezultă:

$$N_2 = P + \gamma_{AL} \cdot V_{AL} = 2000 + 27 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}25^2}{4} \cdot 8 = 2011 \ \text{kN},$$

iar presiunea de contact este:

$$P_{s2} = \frac{N_2}{A_{ef}} = \frac{4 \cdot 2011 \cdot 10^3}{250^2} = 40{,}96 \ \ \text{MPa} < P_{aAL},$$

Forța la contactul dintre oțel şi beton va fi:

$$N_3 = N_2 + \gamma_{OL} \cdot V_{OL} = 2011 + 78{,}5 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}325^2}{4} \cdot 0{,}02 = 2011 \text{kN}.$$

Observații: Greutatea plăcii de oțel este neglijabilă față de cea a stâlpului şi nu se ia în considerare.

Presiunea de contact în 2 este:

$$P_{s3} = \frac{N_3}{A_{ef}} = \frac{4 \cdot 2011 \cdot 10^3}{325^2 \cdot \pi} = 24{,}24 \text{ MPa} < P_{aBet}.$$

Forța axială dintre beton şi pământ se obține:

$$N_4 = N_3 + \gamma_{bet} \cdot V_{bet} = 2011 + 50 \cdot 1{,}2^2 \cdot 1 = 2083 \text{ kN},$$

iar presiunea de contact este:

$$P_{s4} = \frac{N_4}{A_{ef}} = \frac{2083 \cdot 10^3}{1200^2} = 1{,}419 \text{ MPa} < P_{aPam}.$$

Deci, calculele de rezistență pentru acest stâlp sunt corecte, deoarece în toate zonele de contact nu se depăşeşte presiunea admisibilă a materialului celui mai puțin rezistent. Se mai observă că greutatea plăcii de oțel este neglijabilă față de sarcină, greutatea stâlpului şi greutatea fundației.

6.5.2. Suprafețe cilindrice în contact

În cazul îmbinărilor cu nituri, bolțuri, buloane, etc. suprafețele în contact dintre (ER) au forme cilindrice.

În figura (6.12,a) se consideră o îmbinare cu un nit. Forța P se transmite de la ER 2 la 3 prin intermediul nitului 1 de diametru D şi lungime 2L.

Dacă se presupune că intensitatea forţei este aceeaşi pe toată grosimea L a elementelor 2 respectiv 3 atunci pe fiecare suprafaţă elementară, $dA = L \cdot \frac{D}{2} \cdot d\alpha$, se va transmite o forţă elementară normală, (fig. 6.12):

$$\mathbf{dN = p \cdot dA = p \cdot L \cdot \frac{D}{2} \cdot d\alpha,}$$

ce depinde de distribuţia presiunii de contact.

Distribuţia reală depinde de elementul de imbinare (nit sau şurub) modul de asamblare (nedemontabilă sau demontabilă) şi se poate determina experimental.

Dacă se consideră distribuţia $p = p_0 \cdot \cos\alpha$, ce aproximează foarte bine pe cea reală, atunci din ecuaţia de echivalenţă dintre forţă şi presiune se obţine:

$$\mathbf{P = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dN \cdot \cos\alpha = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (p \cdot dA) \cdot \cos\alpha = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(p_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{L \cdot D}{2} \cdot d\alpha \right) \cdot \cos\alpha = \frac{\pi}{4} \cdot L \cdot D \cdot p_0,}$$

din care rezultă valoarea presiunii maxime în contact,

$$\mathbf{p_0 = \frac{4P}{D \cdot L \cdot \pi} = 1{,}273 \cdot \frac{P}{D \cdot L}.} \qquad \mathbf{(6.22)}$$

În calculele inginereşti se consideră că forţa P se distribuie uniform pe suprafaţa D·L (fig. 6.12,e, f), adică

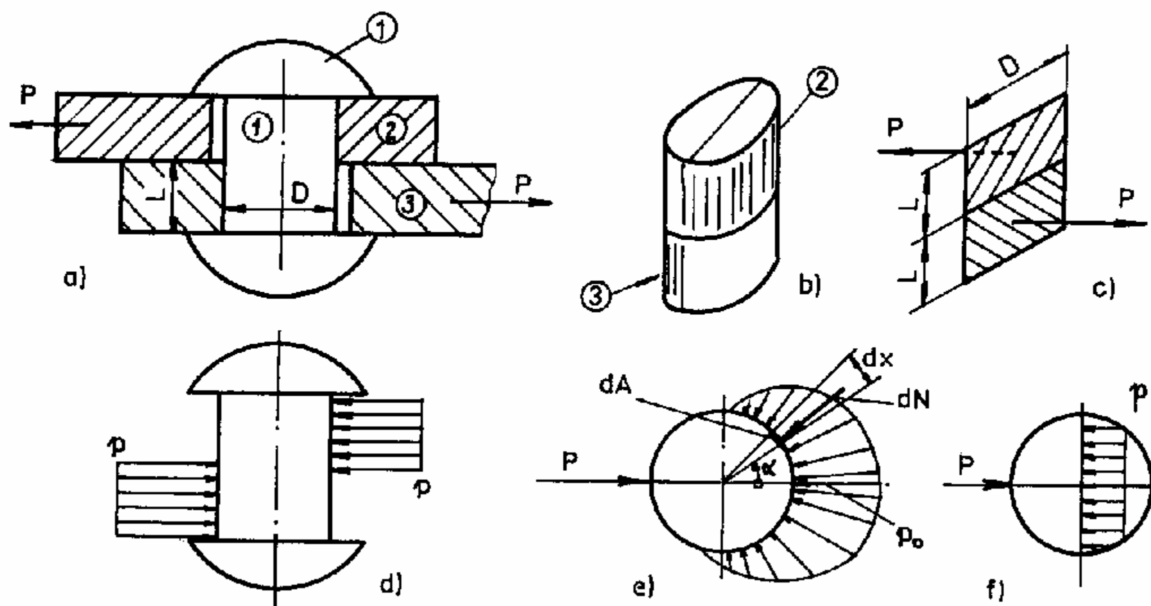


Fig. 6.12

$$\mathbf{P = p_a \cdot D \cdot L} \quad \text{sau} \quad \mathbf{p_{max} = \frac{P}{D \cdot L}}. \qquad \mathbf{(6.23)}$$

Presiunea de contact admisibilă, în cazul suprafețelor cilindrice fixe, se ia:

$$\mathbf{p_a = (1 \ldots 1{,}5) \cdot \sigma_{ac}}, \qquad \mathbf{(6.24)}$$

iar dacă cele două piese cilindrice trebuie să aibă o mişcare relativă una faţă de alta, cum este fusul în lagăr, se ia:

$$\mathbf{p_a = (0{,}5 \ldots 0{,}8) \cdot \sigma_{ac}}. \qquad \mathbf{(6.23,a)}$$

Astfel, pentru OL 37 cu $\sigma_{ac} = \sigma_a = 150$ N/mm^2, presiunea admisibilă se poate lua între valorile $p_a = 75 \ldots 225$ MPa.

Aplicața 6.4. Să se verifice la strivire îmbinarea cu nituri de la aplicația 6.1 (fig. 6.6) dacă $p_a = 1{,}5\ \sigma_a = 1{,}5 \cdot 150 = 225$ MPa.

Rezolvare: Forța pe un nit, ținând seama de ipoteza că forța se distribuie uniform pe fiecare nit (a se vedea § 7.4), este:

$$P_1 = \frac{P}{3} = \frac{150}{3} = 50 \text{ kN}.$$

Presiunea de contact este:

$$p_{ef} = \frac{P_1}{D \cdot L} = \frac{50 \cdot 10^3}{18 \cdot 12} = 231{,}5 \text{ MPa}.$$

Întrucât $p_{ef} = 231{,}5 < 1{,}05 \cdot p_a = 236{,}3$ MPa, ÎMBINAREA REZISTĂ.

6. 5. 3. Suprafețe mici în contact

Asemenea suprafețe există la contactul dintre bilele sferice, cilindrice, butoiaş, etc. şi suprafețele de aşezare ale acestora. În aceste cazuri, datorită suprafețelor de rezemare foarte mici, prin care se transmit forțele, se produc presiuni de contact deosebit de mari. Sub acțiunea forțelor de contact mari cele două corpuri se deformează local (se turtesc).

În cazul a două bile sferice, apăsate una către cealaltă cu forța P, acestea se deformează, obținându-se o suprafață circulară de contact, cu diametrul 2a (fig.6.13).

Presiunea maximă de contact a fost stabilită de H. Hertz, luând în considerare următoarele ipoteze:

- diametrul 2a, al suprafeţei de contact, este mic în comparaţie cu diametrele d_1 şi d_2 ale bilelor:
- materialele celor două corpuri au deformaţii liniar eleastice:
- presiunile de contact sunt normale pe suprafaţa de contact.

În acest caz presiunea maximă dezvoltată pe axa centrelor celor două bile se calculează cu formula dedusă de H. Hertz (cu ajutorul teoriei elasticităţii):

$$\mathbf{p_{max} = 0,975 \cdot \sqrt[3]{P \cdot \left(\frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 \cdot d_2}\right)^2}}, \qquad \mathbf{(6.25)}$$

iar dacă cele două corpuri sunt confecţionate din acelaşi material:

$$\mathbf{p_{max} = 0,62 \cdot \sqrt[3]{P \cdot E^2 \cdot \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 \cdot d_2}\right)^2}}. \qquad \mathbf{(6.25,a)}$$

În cazul general al unor corpuri ce au forme geometrice simple (sferă, cilindru, con, trunchi de con, elipsoid, etc.) suprafaţa de contact dintre cele două corpuri are formă de elipsă, de ecuaţie:

$$\mathbf{A \cdot x^2 + B \cdot y^2 = ct.,} \qquad \mathbf{(6.26)}$$

iar presiunea maximă de contact se calculează cu formula:

$$\mathbf{p_{max} = \alpha \cdot \sqrt[3]{P \cdot A^2 \cdot E^2}} \qquad \mathbf{(6.27)}$$

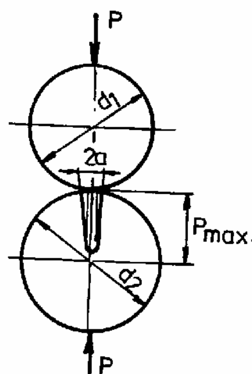


Fig. 6.13

Coeficientul α din formula (6.27) depinde de parametrii A şi B ai ecuaţiei elipsei (6.26) şi se dau în tabelul (6.1).

Tabelul 6.1.

A/B	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,15	0,15	0,1	0,05	0,02	0,01	0,007
α	0,62	0,667	0,742	0,85	0,14	1,14	1,27	1,54	2,03	2,85	3,6	5,1

În anexa 5 de la sfârşitul cursului se dau valorile parametrilor A şi B ai ecuaţiei (6.26) şi formule de calcul ale presiunii maxime de contact pentru cele mai frecvente cazuri întâlnite în practica inginerească.

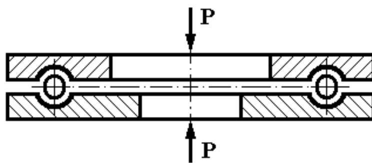


Fig. 6.14

Tabelul 6.2.

Materialul	σ_r [MPa]	p_a [MPa]
Fonta	900 - 1400	800 - 1300
Oțel carbon călit	480 - 800	850 - 1400
Oțel aliat călit	700 - 1800	1200 - 1600
Oțel de rulmenți	-	3800

Experimental s-a constatat că presiunea maximă de contact poate depăşi cu mult limita de curgere a materialului fără ca ER să se distrugă. Fenomenul se explică prin faptul că în zona centrală de contact, unde se atinge p_{max}, materialul se află în stare triaxială de compresiune uniformă (vezi § 3.7).

Valorile presiunii admisibile în cazul contactului pe suprafețe foarte mici, pentru fonte şi oțeluri se dau în tabelul 6.2.

Aplicația 6.5. Să se calculeze forța capabilă care o poate prelua un rulment de presiune cu 8 bile (fig. 6.14) cu diametru d_1= 6 mm, ce are căile de rulare concave cu raza $R = \frac{d_2}{2} = 8$ mm. Se cunoaşte $E = 210$ GPa şi p_a= 3,8 GPa.

Rezolvare: Utilizând formula din anexa 5 (nr. 2) pentru oțel de rulmenți se obține:

$$P_{cap} = n \cdot \left(\frac{p_{max}}{0,62}\right)^3 \cdot \left(\frac{d_1 \cdot d_2}{d_2 - d_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{E^2} = 8 \cdot \left(\frac{3,8}{0,62}\right)^3 \cdot \left(\frac{6 \cdot 8}{8-6}\right)^2 \cdot \frac{1}{210^2} = 24,06 \text{ kN}$$

Se adoptă: $P = 24$ kN.

6.6. Sisteme de bare static nedeterminate

6.6.1. Noțiuni generale

Până acum s-au analizat eforturile şi tensiunile dintr-o bară static determinată. În practica inginerească sunt ansamble şi subansamble formate din sisteme de bare. Aceste sisteme pot fi static determinate sau static nedeterminate.

La sistemele static determinate reacțiunile, respectiv eforturile din secțiune, se pot determina din ecuațiile de echilibru. În acest caz numărul ecuațiilor statice este egal cu numărul necunoscutelor.

Când numărul necunoscutelor (reacțiuni sau/şi eforturi) este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru static, sistemul se numeşte **static nedeterminat**. Diferența dintre numărul necunoscutelor şi numărul de ecuații statice, constituie **gradul de nedeterminare al sistemului**. Pentru rezolvare în acest caz, **se adaugă la ecuațiile statice un număr de ecuații de deformație egal cu gradul de nedeterminare** al sistemului. Aceste ecuații suplimentare se obțin din analiza aspectului geometric şi de compatibilitate al sistemului de bare.

Sistemele static nedeterminate solicitate axial pot fi cauzate de:

- legături ce împiedică deformarea produsă de sarcini sau de modificarea temperaturii barelor:
- eforturi (tehnologice sau de asamblare) ce se produc în sistemele de bare:

- utilizarea în construcția unei bare a mai multor materiale cu caracteristici fizico-mecanice diferite.

În toate aceste cazuri problemele static nedeterminate se pot rezolva parcurgând următoarele trei aspecte:

a) **aspectul static**: scriind ecuațiile de echilibru static se stabilesc necunoscutele sistemului şi se află gradul de nedeterminare:

b) **aspectul geometric** - se scrie un număr de ecuații de deformații egal cu gradul de nedeterminare:

c) **aspectul fizic** - se exprimă deformațiile de la punctul b) în funcție de eforturile sau tensiunile din bară.

Astfel după parcurgerea celor trei aspecte, din aspectul static şi cel fizic se obțin ecuațiile necesare care prin rezolvare, dau soluțiile problemei static nedeterminate în eforturi, în tensiuni sau în deformații.

6.6.2. Bare având deformațiile împiedicate de legături

Aplicația 6.6. Bara încastrată (sau articulată), la cele două capete (fig. 6.15). Se consideră bara dreaptă, prismatică încastrată sau articulată la cele două capete şi încărcată cu sarcina axială P într-un punct situat la distanța a de reazemul 1 (respectiv la b de reazemul 2).

Rezolvare: Reacțiunile în cele două reazeme sunt H_1 şi H_2.

Aspectul static:

$H_1 + H_2 = P$ (sistem simplu static nedeterminat):

Aspectul geometric:

$\Delta a + \Delta b = 0$ (deformația totală a barei trebuie să fie nulă):

Aspectul fizic:

$$\frac{H_1 \cdot a}{E_1 \cdot A_1} + \frac{H_1 - P}{E_2 \cdot A_2} \cdot b = 0,$$

din care se obține:

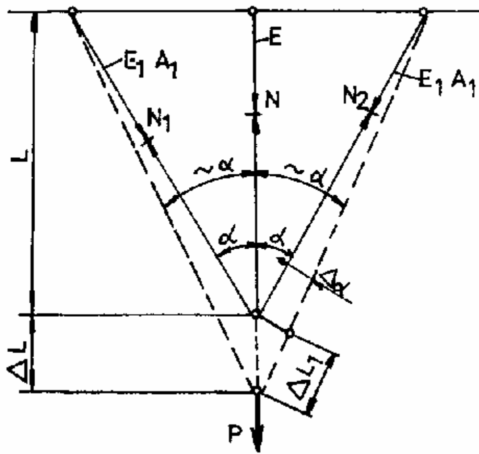


Fig. 6.17

$$H_1 = \frac{P}{1 + \frac{a}{b} \cdot \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{A_2}{A}} \qquad \text{şi apoi}$$

$$H_2 = P - H_1.$$

Având valorile reacţiunilor se poate trasa diagrama de variaţie a forţelor axiale şi apoi se poate efectua calculul de rezistenţă.

Dacă $E_1 \cdot A_1 = E_2 \cdot A_2 = E \cdot A$ şi $L = a + b$, atunci:

$$H_1 = \frac{b}{L} \cdot P \quad \text{şi} \quad H_2 = \frac{a}{L} \cdot P.$$

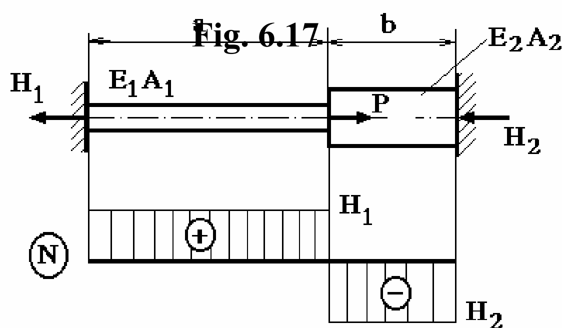


Fig. 6.15

Aplicaţia 6.7. Sistem de bare paralele.

Se consideră bara de mare rigiditate (1)-(3) suspendată prin trei bare verticale, prismatice de lungimi şi rigidităţi diferite. Sarcina verticală P acţionează la distanţa c de punctul 3 (fig. 6.16).

Rezolvare:

a) Aspectul static (ecuaţiile de echilibru sunt):

$$N + N_2 + N_3 = P,$$

$$N_1 \cdot (a + b) + N_2 \cdot b = P \cdot c.$$

b) Aspectul geometric, corespunzător stării de deformaţie al barelor este:

$$\frac{\Delta L_2 - \Delta L_1}{a} = \frac{\Delta L_3 - \Delta L_2}{b}.$$

c) Aspectul fizic (adică exprimând alungirile funcţie de eforturi) se obţine:

$$\frac{N_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} \cdot \frac{b}{a} - \frac{N_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} \cdot \frac{a + b}{a} + \frac{N_3 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3} = 0.$$

Această ultimă ecuație împreună cu cele două ecuații de echilibru constituie un sistem de trei ecuații din care se pot determina eforturile N_1, N_2 şi N_3 din bare.

Aplicația 6.8. Sistem de bare articulate, simetrice.

Fie sistemul de bare prismatice, coplanare, articulate şi acționate în A de forța P. Bara mediană are lungimea L şi rigiditatea $E \cdot A$ iar cele laterale L = L / cosα şi respectiv $E_1 \cdot A_1$ (fig. 6.17).

Rezolvare:

a) Aspectul static:

$N_1 \cdot \sin\alpha - N_2 \cdot \sin\alpha = 0,$

$N + (N_1 + N_3) \cdot \cos\alpha = P.$

b) Aspectul geometric: neglijând modificarea unghiului α după deformație (conform ipotezei deformațiilor mici) Δα este foarte mic față de unghiul α. Între deformațiile ΔL şi ΔL_1 există relația:

$\Delta L_1 = \Delta L \cdot \cos\alpha.$

b) Aspectul fizic se scrie:

$$\frac{N_1 \cdot \frac{L}{\cos\alpha}}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \cdot \cos\alpha .$$

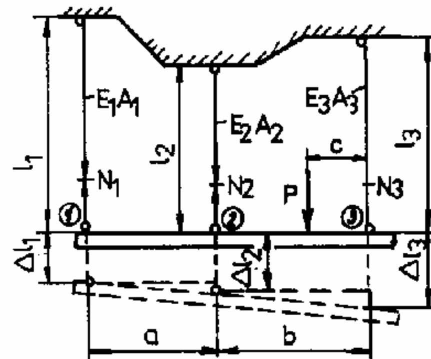


Fig. 6.16

Din cele trei ecuații rezultă:

$$N = \frac{P}{1 + \frac{2E_1 \cdot A_1}{E \cdot A} \cdot \cos^3\alpha},$$

$$N_1 = N_2 = \frac{P - N}{2 \cdot \cos\alpha}.$$

Dacă $E \cdot A = E_1 \cdot A_1$ atunci se obține:

$$N = \frac{P - N_1}{1 + 2 \cdot \cos^3\alpha} \quad \text{şi} \quad N_1 = N_2 = \frac{P \cdot \cos^2\alpha}{1 + \cos^3\alpha}.$$

Din formulele de mai sus se observă că $N > N_1$, astfel că sarcina capabilă se determină, în acest caz, numai funcție de N:

$P_{cap} = (1+2\cos^3\alpha) \cdot N_{cap} = (1+2\cos^3\alpha) \cdot A \cdot \sigma_a$.

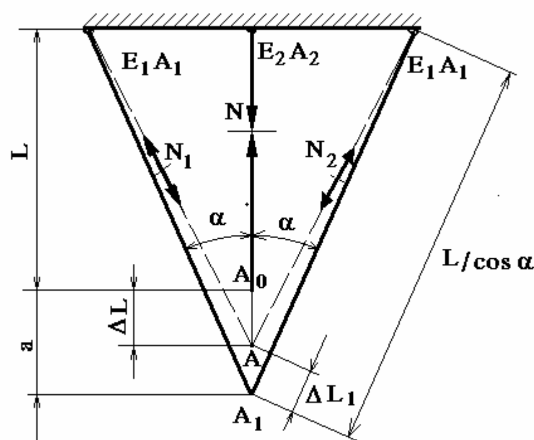


Fig. 6.18

6.6.3. Bare cu eforturi inițiale

Lungimile barelor din sistemele static nedeterminate se stabilesc pe considerente geometrice. Dacă lungimile unor bare diferă de valorile nominale conform toleranțelor de execuție ale reperelor, atunci acestea se pot monta numai după ce au fost lungite sau scurtate forțat. Prin aceasta se introduc eforturi suplimentare în sistem, rezultate din montajul forțat. Un sistem de bare ce conține eforturi înainte de a fi acționat de sarcinile pentru care a fost construit, se numeşte **sistem cu eforturi inițiale**. Valorile eforturilor inițiale se pot determina adăugând la ecuațiile de echilibru, ecuații de deformație obținute din studiul geometriei sistemului.

În aplicațiile analizate mai jos **valorile impreciziilor de montaj, respectiv ale deformațiilor rezultate la montaj sunt mici, astfel că acestea sunt liniar elastice**.

Aplicația 6.9. Sisteme de bare articulate concurente cu imperfecțiune la montaj. La sistemul plan de bare articulate din figura 6.18 bara centrală este mai scurtă cu lungimea a. În urma montajului forțat, în bara mediană se va produce o forță axială de întindere iar în cele laterale forțe axiale de compresiune.

Rezolvare:

a) Aspectul static:

$$\mathbf{N_1 \cdot \sin\alpha = N_2 \cdot \sin\alpha,}$$

$$\mathbf{N = (N_1 + N_2) \cdot \cos\alpha.}$$

Aspectul geometric:

$$\mathbf{\Delta L + \frac{\Delta L_1}{\cos\alpha} = a.}$$

Aspectul fizic:

$$\mathbf{\frac{N \cdot L}{E \cdot A} + \frac{N_1 \cdot L}{E_1 \cdot A_1 \cdot \cos^2\alpha} = a.}$$

Din cele trei ecuații în eforturi se obține:

$$\mathbf{N = \frac{a \cdot E \cdot A}{L + \frac{E \cdot A}{2E_1 \cdot A_1} \cdot \frac{L}{\cos^3\alpha}}}, \qquad \mathbf{N_1 = N_2 = \frac{N}{2\cos\alpha}}.$$

6.6.4. Bare cu secțiuni neomogene

În construcțiile inginereşti se utilizează (ER) alcătuite din două sau mai multe materiale, ce au caracteristici fizico-mecanice diferite. Elementele componente ale barei formează un sistem ce se comportă ca un tot omogen. Exemple de asemenea (ER) sunt: stâlpi din beton armat, cablurile bimetalice etc.

În figura 6.19 se dă o bară prismatică alcătuită din trei materiale diferite ($E_1 \cdot A_1$, $E_2 \cdot A_2$, $E_3 \cdot A_3$) solidarizate.

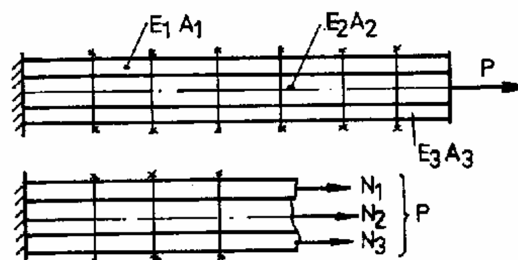


Fig. 6.19

În acest caz:

a) aspectul static este:

$$\mathbf{N_1 + N_2 + N_3 = P,}$$

b) aspectul geometric este:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3.$$

c) aspectul fizic va fi:

$$\frac{N_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2}{E_2 \cdot A_2} = \frac{N_3}{E_3 \cdot A_3}.$$

Prin rezolvarea ecuațiilor în eforturi rezultă:

$$N_1 = \frac{P \cdot E_1 \cdot A_1}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3}, \quad N_2 = \frac{P \cdot E_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3},$$

$$N_3 = \frac{P \cdot E_3 \cdot A_3}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3}.$$

Generalizând se obține formula pentru eforturi:

$$N_i = \frac{P \cdot E_i \cdot A_i}{\sum E \cdot A} \qquad \textbf{(6.28)}$$

şi din aceasta rezultă tensiunea în materialul i al barei:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} .= \frac{P \cdot E_i}{\sum A \cdot E}. \qquad \textbf{(6.29)}$$

Dacă aspectul fizic se scrie sub forma:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_3}{E_3},$$

din aceasta se obțin relațiile:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \cdot \frac{E_1}{E_2} = \sigma_3 \cdot \frac{E_1}{E_3}, \ \sigma_2 = \sigma_1 \cdot \frac{E_2}{E_1} = \sigma_3 \cdot \frac{E_2}{E_3}, \ldots. \qquad \textbf{(6.30)}$$

Deci, **tensiunea ce se produce într-un material depinde de tensiunile din celelalte materiale şi de modulele de elasticitate ale acestor materiale şi nu depinde de aria secțiunilor**.

Ca atare, pentru a rezulta construcții eficiente este necesar să se îndeplinească simultan condițiile:

$\sigma_{1ef} = \sigma_{1a}$, $\sigma_{2ef} = \sigma_{2a}$, $\sigma_{3ef} = \sigma_{3a}$, etc.

ce se poate realiza numai dacă:

$$\frac{\sigma_{1a}}{E_1} = \frac{\sigma_{2a}}{E_2} = \frac{\sigma_{3a}}{E_3}. \quad (6.31)$$

Această condiție nu se poate îndeplini decât în mod excepțional.

Relația (6.31) se utilizează pentru determinarea tensiunilor admisibile ale celorlalte materiale. Valorile **tensiunilor admisibile de calcul se determină ținând cont că acestea pot fi egale sau inferioare valorii tensiunii admisibile date pentru materialul respectiv**.

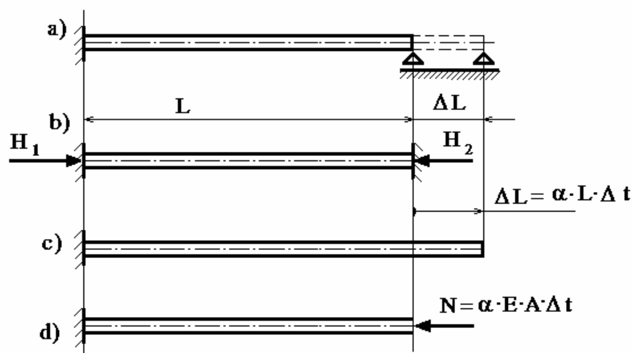


Fig. 6.20

Aplicația 6.10. Să se determine sarcina capabilă pentru un cablu format din 19 fire de oțel (σ_{a1}= 200 MPa, E_1= 120 GPa) şi 90 fire de aluminiu (σ_{a2}= 30 MPa, E_2= 70 GPa). Firele au diametrul de d = 3 mm.

Rezolvare. Tensiunile admisibile de calcul sunt

σ_{a2}= 30 MPa,

$$\sigma'_{a1} = \sigma_{a2} \cdot \frac{E_1}{E_2} = 30 \cdot \frac{210}{70} = 90 \text{ MPa}.$$

Se observă că pornind de la σ_{a1}= 200 MPa se obține $\sigma'_{2a} = 30$ MPa, deci inacceptabil.

Acum se poate calcula sarcina capabilă cu relația:

$$P = N'_{1cap} + N_{2cap} = \sigma'_{a1} \cdot A_1 + \sigma_{2a} \cdot A_2 = (90 \cdot 19 + 30 \cdot 90) \times \frac{3^2 \pi}{4} = 31170 \text{ N}.$$

Se adoptă: P=30 kN.

6.6.5. Eforturi datorită dilatărilor împiedicate

O bară dreaptă de lungime L, ce se poate dilata liber, prin încălzire uniformă se lungeşte (fig. 6.20,a) cu

$$\mathbf{\Delta L=\alpha \cdot L \cdot \Delta t} \qquad \textbf{(6.32)}$$

în care α este coeficientul de dilatare liniară (vezi anexa 2), iar $\mathbf{\Delta t = t - t_0}$ este creşterea temperaturii. Alungirea specifică din bară este:

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{\Delta L}}{\mathbf{L}} = \alpha \cdot \mathbf{\Delta t} \qquad \textbf{(6.33)}$$

Când bara are articulații fixe sau este încastrată la ambele capete (fig. 6.20,b), ce împiedică dilatarea, în bară se produce o forță axială de compresiune. Această forță trebuie să scurteze bara cu lungirea produsă de creşterea temperaturii (fig. 6.20,c şi d), adică cu:

$$\mathbf{\Delta L} = \alpha \cdot \mathbf{\Delta t \cdot L} = \frac{\mathbf{N \cdot L}}{\mathbf{E \cdot A}},$$

din care se obține formula pentru forța axială de compresiune:

$$\mathbf{N= \alpha \cdot E \cdot A \cdot \Delta t} \qquad \textbf{(6.34)}$$

Ca atare în bară va exista tensiunea:

$$\sigma = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}} = \alpha \cdot \mathbf{E \cdot \Delta t.} \qquad \textbf{(6.35)}$$

Când bara este formată din mai multe tronsoane prismate din materiale diferite (L_1, A_1, E_1, A_1, L_2, A_2, E_2, A_2, ...), forța axială din bară rezultă:

a) Din aspectul static:

$$\mathbf{N= N_1= N_2= N_3= ...} \qquad \textbf{(6.36)}$$

b) Din aspectul geometric se obține relația:

$$\mathbf{(\Delta L)_T- (\Delta L)_N= a} \qquad \textbf{(6.37)}$$

în care a este spațiul destinat dilatării (fig. 6.21).

c) Aspectul fizic pentru acest caz este:

$$\sum \alpha \cdot \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{t} - \sum \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{L}}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}} = \mathbf{a}. \qquad \textbf{(6.38)}$$

Relațiile (6.36) şi (6.37) sunt necesare şi suficiente pentru determinarea eforturilor în barele cu dilatare împiedicată.

Aplicația 6.11. Profilul I20 ($A = 35{,}5\ cm^2$, $E=210$ GPa, $\alpha=12\times10^{-6}\ ^\circ C^{-1}$) s-a montat ca în figura 6.21, la temperatura de 5° C şi s-a lăsat un spațiu de dilatare a = 2 mm. Să se determine efortul şi tensiunea din bară la temperatura de 45°C.

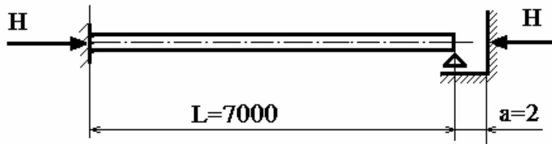


Fig. 6.21

Rezolvare: Spațiul necesar dilatării libere este:

$$\Delta L=\alpha\cdot\Delta t\cdot L=12\cdot10^{-6}\cdot40\cdot7000 = 3{,}36 \text{ mm.}$$

Întrucât $\Delta L = 3{,}36$ mm > a = 2 mm, dilatarea este împiedicată. Deci sistemul este static nedeterminat. Ecuațiile din cele trei aspecte sunt:

a) $N = H_1 = H_2$,

b) $(\Delta L)_T - (\Delta L)_N = a$,

c) $\alpha \cdot L \cdot \Delta t - \dfrac{N \cdot L}{E \cdot A} = a..$

din care rezultă:

$$H = N = \left(\alpha \cdot \Delta t - \frac{a}{L}\right) \cdot E \cdot A = \left(12 \cdot 10^{-6} \cdot 40 - \frac{2}{7000}\right) \cdot 210 \cdot 3350 = 136{,}7 \text{ kN},$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A} = \frac{136{,}7 \cdot 10^3}{3350} = 40{,}8 \text{ MPa} < \sigma_a = 150 \text{ MPa}.$$

Observație: Eforturile şi tensiunile ce iau naştere datorită dilatării impiedicate sunt suplimentare şi se însumează cu cele produse de sarcinile utile.

6.7. Solicitări axiale în domeniul plastic

În practica inginerească se utilizează bare şi sisteme de bare solicitate în domeniul plastic. Asemenea bare sunt construite din oțel de rezistență mică şi

mijlocie, ce au un palier de curgere mare, sau din alte aliaje ce au caracteristici asemănătoare cu ale acestor oţeluri. La aceste materiale panta iniţială a curbei caracteristice se poate schematiza ca în figura 6.22 (material ideal elasto-plastic). Pentru acestea, când deformaţia este elastică ($\varepsilon \le \varepsilon_c$), au comportare liniar elastică:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

iar pentru deformaţii plastice ($\varepsilon > \varepsilon_c$) tensiunea este constantă şi egală cu limita de curgere ($\sigma = \sigma_c$). Aşadar, **când tensiunea atinge limita de curgere în bară se produce efortul maxim, limită:**

$$N_L = N_{max} = A \cdot \sigma_c, \qquad (6.39)$$

iar bara se poate lungi nedefinit.

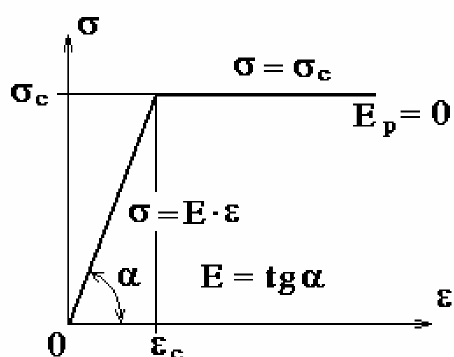


Fig. 6.22

La un sistem static nedeterminat, stadiul plastic de solicitare va apare în barele cele mai solicitate, la care tensiunea a atins limita de curgere. **Dacă sarcina creşte, efortul în barele solicitate în stadiul plastic va rămâne constant şi egal cu $N_L = A \cdot \sigma_c$, iar deformaţiile acestora vor creşte o dată cu ale celorlalte bare solicitate încă elastic**. Sarcina mai poate creşte până ce tensiunile din toate barele ating limita de curgere. Sarcina corespunzătoare acestei situaţii **se numeşte sarcină limită**. Aceasta este valoarea maximă a sarcinii la care sistemul se distruge.

La sarcina limită tensiunile în toate barele sistemului static nedeterminat sunt egale cu limita de curgere, iar eforturile cu efortul limită. Astfel că **sistemul static nedeterminat solicitat în stadiu plastic devine sistem static determinat**.

În prezent, calculul de rezistenţă al construcţiilor metalice se efectuează la sarcina limită, conform STAS 10108 /0,1,2-1978 “Calculul elementelor din oţel”.

Calculul de rezistenţă la sarcina limită (numit şi calculul de rezistenţă la starea limită sau la capacitatea portantă limită) are la bază relaţiile de verificare respectiv de capacitate de încărcare:

$$\mathbf{c = \frac{P_L}{P}, \qquad P = \frac{P_L}{c},} \qquad \mathbf{(6.40)}$$

în care c este coeficientul de siguranță.

Pentru barele static determinate solicitate axial nu există diferență între calculul de rezistență prin metoda rezistenței admisibile şi calculul la starea limită. De aceea sistemele static determinate se calculează la rezistența admisibilă.

Metoda sarcinii limită prezintă avantaje importante le sistemele static nedeterminate confecționate din oțel de rezistență mică şi mijlocie. Dintre numeroasele avantaje ale acestei metode enumerăm aici două:

- calculul de rezistență este mult mai simplu întrucât sistemul devine static determinat: toate barele sunt încărcate la limita de curgere şi,
- se utilizează eficient întreaga capacitate de rezistență a sistemului.

Aplicația 6.12. Să se determine sarcina capabilă, calculată prin metoda stării limită, la sistemul de bare plane concurente, simetrice din figura 6.23.

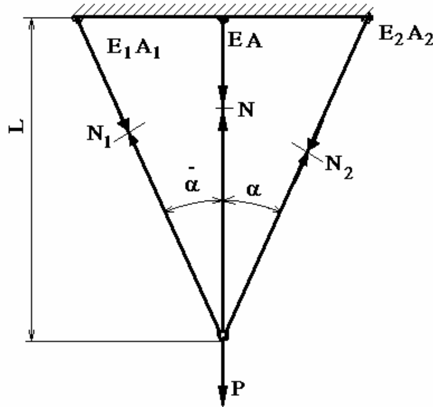


Fig. 6.23

Rezolvare:

Aspectul static conține ecuațiile:

$N_1 \cdot \sin\alpha = N_2 \cdot \sin\alpha$,

$N + (N_1 + N_2) \cdot \cos\alpha = P$,

la care se adaugă condițiile:

$N = A \cdot \sigma_c$ şi $N_1 = N_3 = A_1 \cdot \sigma_c$.

Astfel că, sarcina limită rezultă

$P_L = N + 2N_1 \cdot \cos\alpha = (A + 2A_1 \cdot \cos\alpha) \cdot \sigma_c$.

Sarcina capabilă se obține:

$$P_{cp} = \frac{P_L}{c} = \left(A + 2A_1 \cdot \cos\alpha\right) \cdot \frac{\sigma_c}{c} = \left(A + 2A_1 \cdot \cos\alpha\right) \cdot \sigma_a,$$

întrucât $\frac{\sigma_c}{c} = \sigma_a$.

Dacă barele au aceeaşi secțiune ($A_1 = A$), atunci:

$P_{cp} = (1 + 2\cos\alpha) \cdot A \cdot \sigma_a$.

Comparând valoarea obținută în acest caz cu cea obținută prin metoda rezistenței admisibile, de la aplicația 6.10 se obține eficiența:

$$\eta = \frac{P_{cp}}{P_{cap}} \cdot \frac{1 + 2\cos\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha} > 1.$$

Dacă se ia $\alpha = 60°$ rezultă:

$$\eta = \frac{1 + 2\cos 60^\circ}{1 + 2\cos^3 60^\circ} = 1{,}6.$$